第 13 回：弾力性の推定

北村　友宏

2020 年 7 月 31 日

本日の内容

1. 弾力性の推定

弾力性の推定

説明変数と被説明変数の自然対数をとった単回帰モデル

$$
\begin{aligned}
\ln y_i &= \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i, \\
E(u_i \mid x_i) &= 0, \\
E(u_i u_j \mid x_i) &= 0 \quad (i \neq j), \\
V(u_i \mid x_i) &= \sigma^2, \\
i &= 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

を推定することを考える.

- $\ln y_i$ や $\ln x_i$ はそれぞれ，ln まで含めて 1 つの変数と考えれば，線形回帰モデルと同様の手法で推定できる.

- 回帰係数 β_1 は，$\ln y_i$ を $\ln x_i$ で微分したものと考えることもできる．つまり，

$$\beta_1 = \frac{d \ln y_i}{d \ln x_i}.$$

  - 「$\ln x_i$ で微分」と書くと「関数で微分」という書き方になり，数学的に良くないが，ここでは視覚的に分かりやすくするため，$\ln x_i$ を 1 つの変数と考えてこの表記をする．

$$\frac{d\ln y_i}{d\ln x_i} = \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}.$$

（証明）

$$\begin{aligned}\frac{d\ln y_i}{d\ln x_i} &= \frac{d\ln y_i}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{dx_i}{d\ln x_i}\\ &= \frac{d\ln y_i}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{1}{\frac{d\ln x_i}{dx_i}}.\end{aligned}$$

ここで，自然対数の微分の公式から，

$$\frac{d\ln y_i}{dy_i} = \frac{1}{y_i},\quad \frac{d\ln x_i}{dx_i} = \frac{1}{x_i}$$

なので，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ln y_i}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{1}{\frac{d\ln x_i}{dx_i}} &= \frac{1}{y_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x_i}} \\
&= \frac{1}{y_i}\cdot\frac{dy_i}{\frac{dx_i}{x_i}} \\
&= \frac{dy_i}{y_i}\cdot\frac{1}{\frac{dx_i}{x_i}} \\
&= \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}.
\end{aligned}
$$

したがって，$\dfrac{d\ln y_i}{d\ln x_i} = \dfrac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$ である．（証明終）

以上より，$\beta_1 = \dfrac{d\ln y_i}{d\ln x_i} = \dfrac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$.

- dx_i: x_i が微小に増加したときの x_i の増加量
- dy_i: y_i が微小に増加したときの y_i の増加量
- $\dfrac{dx_i}{x_i}$: （x_i が微小に増加したときの）x_i の増加率
- $\dfrac{dy_i}{y_i}$: （y_i が微小に増加したときの）y_i の増加率

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}} = \frac{(y_i\text{の増加率})}{(x_i\text{の増加率})}.$$

$\Rightarrow \beta_1$, つまり $\frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$ は，x_i が 1%増加したときに y_i が何%増加するかを表す．これを「y_i の x_i に対する弾力性（elasticity）」または「y_i の x_i 弾力性」という.

- e.g., 需要の価格に対する弾力性，需要の価格弾力性
- 弾力性が β_1 であれば，x_i が 1%増加すると y_i は β_1%増加する.

以上より，

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

における $\ln x_i$ の回帰係数 β_1 は，「y_i の x_i に対する弾力性」.

➥ β_1 を推定すれば y_i の x_i に対する弾力性を推定できる.

- e.g., β_1 の OLS 推定値 $\hat{\beta}_1$ が，y_i の x_i に対する弾力性の推定値.

さらに，

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

の仮説検定を行えば，弾力性が 0 と異なるか（y_i は x_i に反応するか）を検証できる.

回帰係数の解釈

対数変換していないものをレベル（level）という．
説明変数や被説明変数がレベルなのか対数値なのかによって，説明変数の回帰係数の解釈が異なる．

- Level-Level Model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1 単位増加すると y_i は β_1 単位増加する．

- Log-Log Model:

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1%増加すると y_i は β_1%増加する．
    （「$100 \times \beta_1$%」にしない！）

- Log-Level Model:

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1 単位増加すると y_i は $100 \times \beta_1$%増加する．
  - β_1 は y_i の x_i に対する半弾力性（semi-elasticity）．

- Level-Log Model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1%増加すると y_i は $\dfrac{1}{100} \times \beta_1$ 単位増加する．
  - あまり使われない．

対数変換したモデルを推定する目的

- 弾力性や半弾力性を推定するため

だけでなく，

- モデルの当てはまりを改善するため

に，Log-Log Model や Log-Level Model を推定する場合もある．

$$\Uparrow$$

変数を対数変換して Log-Log Model などを推定したほうが，Level-Level Model よりも R^2 や $\bar{R}^2$ が高くなったり回帰係数の統計的有意性が強まったりする場合がある．

gretl での変数の対数変換の方法

- gretl の画面上で，自然対数をとりたい変数を選択し，その上で右クリック→「対数を取る」と操作.
  - 対数変換された変数の名前の頭には l_が付けられる.
- 「gretl」ウィンドウのメニューバーから「ファイル」→「データを保存」と操作し，必ずデータセットを上書き保存.

変数の観測値に 0 が含まれている場合

- 0 は対数変換できない．
  ➡ 観測値に 0 が含まれる変数を対数変換すると，0 の観測値が欠損になる．
  ➡ 観測値に 0 が含まれる変数は，レベルのまま使う．

消費の弾力性の推定

モデル

$$\ln c_i = \beta_0 + \beta_Y \ln y_i + \beta_D d_i + u_i \tag{1}$$

を推定し,

- 消費の所得に対する弾力性
- 女性は男性に比べ消費が何%大きい（小さい）か

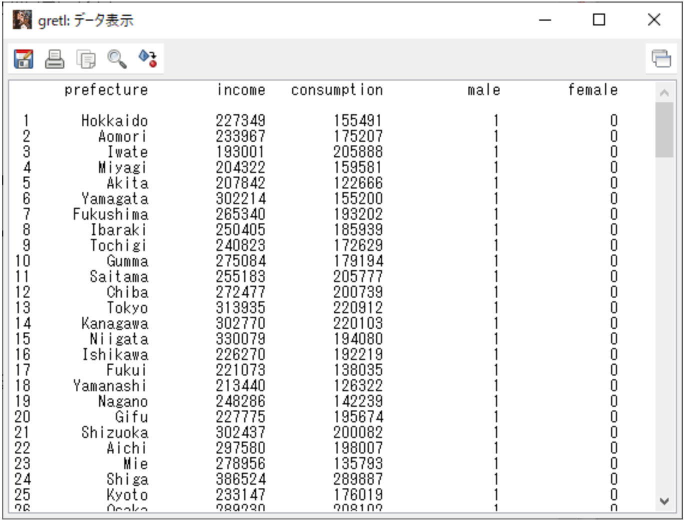
を求める.

- 女性ダミー変数 d_i は観測値に 0 を含むので対数変換しない.

実習 1

1. gretl を起動.
2. 「ファイル」→「データを開く」→「ユーザー・ファイル」と操作.
3. 消費 2009.gdt を選択し，「開く」をクリック.
4. 「income」から「consumption」までの 2 個をドラッグして選択し，その上で右クリック→「対数を取る」と操作.
   - ここでは，「_th」のついていない変数（千円単位ではなく円単位の変数）を対数変換する.
   - l_income（income の自然対数）および l_consumption（consumption の自然対数）という名前の変数が作成される.
5. メニューバーから「ファイル」→「データを保存」と操作．これでデータセットが上書き保存される.

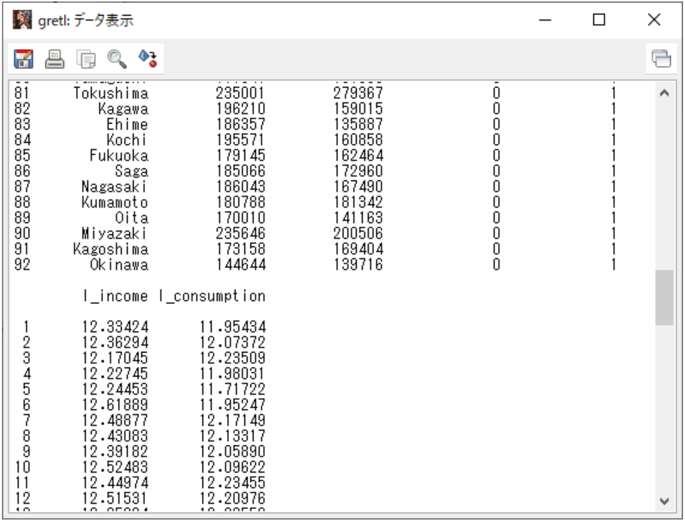
6. Ctrl キーを押しながら「prefecture」「income」「consumption」「male」「female」「l_income」「l_consumption」の 7 つをクリックして選択し，これらのうちどれか 1 つの変数名の上で右クリック→「データ（値）を表示」と操作すると，これら 7 つの変数の観測値リストが新規ウィンドウにて表示される．



gretl: データ表示

	prefecture	income	consumption	male	female
1	Hokkaido	227349	155491	1	0
2	Aomori	233967	175207	1	0
3	Iwate	193001	205888	1	0
4	Miyagi	204322	159581	1	0
5	Akita	207842	122666	1	0
6	Yamagata	302214	155200	1	0
7	Fukushima	265340	193202	1	0
8	Ibaraki	250405	185939	1	0
9	Tochigi	240823	172629	1	0
10	Gumma	275084	179194	1	0
11	Saitama	255183	205777	1	0
12	Chiba	272477	200739	1	0
13	Tokyo	313935	220912	1	0
14	Kanagawa	302770	220103	1	0
15	Niigata	330079	194080	1	0
16	Ishikawa	226270	192219	1	0
17	Fukui	221073	138035	1	0
18	Yamanashi	213440	126322	1	0
19	Nagano	248286	142239	1	0
20	Gifu	227775	195674	1	0
21	Shizuoka	302437	200082	1	0
22	Aichi	297580	198007	1	0
23	Mie	278956	135793	1	0
24	Shiga	386524	289887	1	0
25	Kyoto	233147	176019	1	0

このような画面が表示されれば成功．「gretl: データを表示」のウィンドウは**まだ閉じない！** スクロールすると・・・？



81	Tokushima	235001	279367	0	1
82	Kagawa	196210	159015	0	1
83	Ehime	186357	135887	0	1
84	Kochi	195571	160858	0	1
85	Fukuoka	179145	162464	0	1
86	Saga	185066	172960	0	1
87	Nagasaki	186043	167490	0	1
88	Kumamoto	180788	181342	0	1
89	Oita	170010	141163	0	1
90	Miyazaki	235646	200506	0	1
91	Kagoshima	173158	169404	0	1
92	Okinawa	144644	139716	0	1

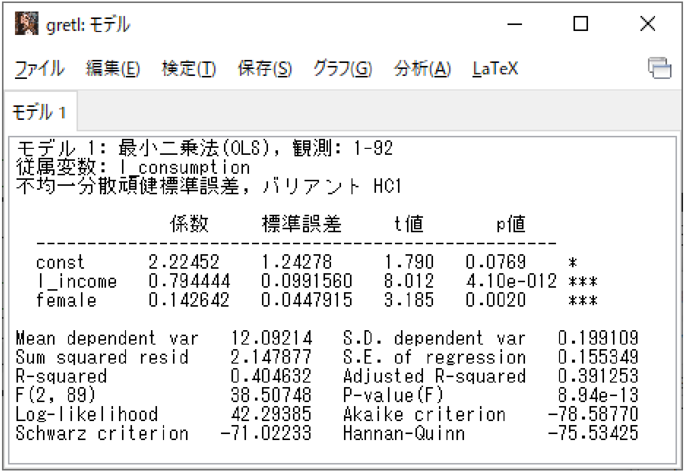
	l_income	l_consumption
1	12.33424	11.95434
2	12.36294	12.07372
3	12.17045	12.23509
4	12.22745	11.98031
5	12.24453	11.71722
6	12.61889	11.95247
7	12.48877	12.17149
8	12.43083	12.13317
9	12.39182	12.05890
10	12.52483	12.09622
11	12.44974	12.23455
12	12.51531	12.20976

6 桁の変数も，対数変換すれば 2 桁になっていることが分かる．確認したら「gretl: データを表示」のウィンドウは閉じてよい．

6. gretl のメニューバーから「モデル」→「通常の最小二乗法」と操作.
7. 出てきたウィンドウ左側の変数リストにある l_consumption をクリックし，3 つの矢印のうち上の青い右向き矢印をクリック.
   - 推定式の左辺の変数（被説明変数，従属変数）が l_consumption（消費支出の対数値）となる.

7. ウィンドウ左側の変数リストにある l_income をクリックし，3 つの矢印のうち真ん中の緑の右向き矢印をクリック．続いてウィンドウ左側の変数リストにある female をクリックし，3 つの矢印のうち真ん中の緑の右向き矢印をクリック．
    - 推定式の右辺の変数（説明変数，独立変数）が l_income（可処分所得の対数値）と female（女性ダミー）の 2 つとなる．
    - 最初から説明変数リストに入っている const は推定式の切片（定数項）のこと．

8. 「頑健標準誤差を使用する」にチェック.
   - 不均一分散に対して頑健な，White の標準誤差が計算され，推定式の誤差項 u_i の分散に関する仮定が誤っていても，より厳密な分析ができるようになる.
9. 「OK」をクリックすると，結果が新しいウィンドウに表示される.



このような画面が表示されれば成功．「gretl: モデル」のウィンドウは**まだ閉じない！**

弾力性の推定結果

- 所得の対数値の係数
  - 0.794444（符号は正）
  - 有意水準 1%で，係数ゼロの H_0 棄却．
    ➡ 消費の所得に対する弾力性は 0.794444 で，統計的に有意にゼロと異なる．
    ➡ 性別を一定としたとき，所得が 1%増加すると消費支出は平均して 0.794444%増加する．

- 女性ダミーの係数
  - 0.142642（符号は正）
  - 有意水準 1%で，係数ゼロの H_0 棄却．
    ➡ 半弾力性は統計的に有意にゼロと異なる．
    ➡ 所得を一定としたとき，女性は男性に比べ，消費支出が平均して 14.2642%大きい．

定数項の推定結果

- 定数項
  - 2.22452（符号は正）
  - 有意水準 10%で，係数ゼロの H_0 棄却．
    ➥ 定数項は統計的に有意にゼロと異なる．

自由度修正済み決定係数の計算結果

- 自由度修正済み決定係数
  - $\bar{R}^2 = 0.391253.$
    ➥ 「所得の対数値」と「女性ダミー」は「消費の対数値」の変動の約 39.1%を説明できている.

レポートや論文に変数を対数変換したモデルと，対数変換していないモデルの推定結果を載せる場合は，例えば以下のような表を載せればよい．

表 1　消費関数推定結果

	モデル（1）			モデル（2）		
	偏回帰係数	t 値		偏回帰係数	t 値	
所得	0.60	7.57	***	0.79	8.01	***
女性ダミー	24.04	2.75	***	0.14	3.19	***
定数項	31.23	1.38		2.22	1.79	*
自由度修正済み決定係数	0.3722			0.3913		

（注 1）モデル（1）の消費と所得はレベル，モデル（2）の消費と所得は対数値である．
（注 2）表中の***，*はそれぞれ有意水準 1%，10%で統計的に有意であることを表す．
（注 3）不均一分散に対して頑健な標準誤差を用いている．
（注 4）観測値数は 92 である．

本日の作業はここまで.